

# 半導体中のスピン軌道相互作用入門 (その1)

江藤 幹雄

慶應義塾大学 理工学部 物理学科

## 1 はじめに

金属や半導体中の電子スピンを制御してデバイスに応用しようという研究が現在盛んにおこなわれている。そのような新しいエレクトロニクスはスピントロニクスと呼ばれ、巨大磁気抵抗効果を手始めに、主に磁性体金属を使った研究が進んでいる(本誌の連載記事、多々良、河野、柴田「スピントロニクス理論の基礎」[1]をご覧ください)。半導体スピントロニクスはまだ基礎研究の段階であるが、これまでの集積化技術の膨大な蓄積を考えると大きな将来性がある。そのときに重要な役割を果たすのがスピン軌道相互作用である。スピン軌道相互作用を利用すると磁性体や磁場を用いずに電子スピンを制御することが可能となる。

スピン軌道相互作用は基礎研究においてもたいへん興味深い研究対象である。古くはアンダーソン局在の問題において反局在効果を与える [2]。微小なリング構造の電気伝導では、(ラシュバのスピン軌道相互作用を通じて) 電場がスピンの位相に影響を及ぼす「アハロノフ・キャッシャー (AC) 効果」が観測される [3]。また電場と垂直方向にスピン流が発生する「スピンホール効果」はスピン注入への応用だけでなく、トポロジカルな効果としての理解が進んでいる [4, 5, 6]。量子情報処理への応用を念頭にいた単電子のスピン制御の研究では、スピン軌道相互作用は位相緩和の原因になるため、その定量的な理解が求められている。スピン軌道相互作用は一体問題である。にも関わらず、これほど多彩な物理現象をもたらすこと、未だに活発な研究が続いていること、は驚きであろう。

この誌上セミナーは、半導体中のスピン軌道相互作用の基礎と最近の発展について、理論面を中心に解説する。内容は3つの柱からなる。(i) AC効果、(ii) スピンホール効果、および (iii) スピン注入ナノデバイスであり、3回に分けて掲載する予定である。量子力学を一通り学んだ学部学生にも理解できるような平易な記述を心掛けた。なお、これらの話題に関してはすでいくつかの解説記事が出ている。AC効果については新田氏ら [3, 7] が、スピンホール効果については村上氏、永長氏 [4, 5, 6] が優れた記事を書かれている。内容が重複することも多々あるが、ご容赦いただきたい。本誌上セミナーがこれらの記事の理解の助けになれば幸いである。

### 1.1 原子でのスピン軌道相互作用

まず多くの方に馴染みのある、原子におけるスピン軌道相互作用から始めよう。古典的に考えるとイメージがつかみやすい。電子(電荷  $-e$ ;  $e > 0$ ) が電荷  $Ze$  の原子核から距離  $r$  のところを速度  $v$  で回っているとする [図 1(a)]。電子が静止した座標系では、電子の周りを原子核が速度  $-v$  で回っているように見える [図 1(a')]。原子核の運動の作る環状電流が電子の位置に作る磁場は、ビオ・サバルの法則により

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} Ze \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ze \hbar \mathbf{l}}{m r^3},$$

ここで  $\mu_0$  は透磁率、 $\hbar l = m r \times v$  は角運動量である。(本解説では  $l$  とスピンの  $s$  は無次元の変数として扱う。) 一方、電子のスピン  $s$  は磁気モーメント

$$\boldsymbol{\mu}_s = -2\mu_B \mathbf{s}$$

[ $\mu_B = e\hbar/(2m)$  はボーア磁子、 $g$  因子を 2 とした] を持つので、磁場中のエネルギーとして

$$-\boldsymbol{\mu}_s \cdot \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ze^2}{m^2} \frac{\hbar}{r^3} (\hbar \mathbf{l} \cdot \mathbf{s})$$

を得る。この古典論の結果はディラックの相対論的量子力学の結果とは 2 倍だけ異なり<sup>1</sup>、正確なスピン軌道相互作用は次式で与えられる。

$$H_{SO} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ze^2}{2m^2} \frac{\hbar}{r^3} (\hbar \mathbf{l} \cdot \mathbf{s}). \quad (1)$$

この式は電子の感じる電場

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

またはポテンシャル  $U$  (力  $\mathbf{F} = -e\mathbf{E} = -\nabla U$ ) を用いると

$$H_{SO} = \frac{-e\hbar}{2m^2c^2} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{E}) = \frac{\hbar}{4m^2c^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} \times \nabla U) \quad (2)$$

のように変形される。ここで  $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$  は光速、 $\boldsymbol{\sigma}$  はパウリ行列:  $\mathbf{s} = (1/2)\boldsymbol{\sigma}$ 。式 (2) が真空中でのスピン軌道相互作用の一般的な表式で、ディラック方程式から直接導かれる [8]。原子の場合に限らず、電場中において電子のスピンは有効磁場を感じ、スピン軌道相互作用がはたらく。しかしスピン軌道相互作用は相対論的效果であり、原子番号  $Z$  の大きい原子の場合を除くと普通は非常に小さい: 式 (2) の分母にある  $2mc^2 \approx 1\text{MeV}$  は粒子・反粒子のエネルギーギャップから来るものである [8]。

## 1.2 半導体中のスピン軌道相互作用 (価電子バンド)

半導体中のスピン軌道相互作用と聞くと、価電子バンドを思い浮かべる方が多いであろう。この点について、(本筋から離れるが) ここで簡単に触れておく。

GaAs, InAs などの化合物半導体では、価電子バンドの頂上付近の電子の波動関数は主として構成原子の  $p$  軌道 (角運動量  $l = 1$ ) から成るため、原子由来のスピン軌道相互作用 (1) がはたらく。まず孤立した原子の  $p$  軌道を考えてみよう。 $H_{SO} \propto \mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$  は  $l^2, s^2$  と可換であるが  $l_z, s_z$  とは可換でない。全角運動量  $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$  を導入すると

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} &= \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{l} + \mathbf{s})^2 - l^2 - s^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} (j^2 - l^2 - s^2). \end{aligned}$$

ゆえに  $H_{SO}$  は  $j^2$  および  $j_z$  と可換であり、エネルギー準位はそれらの量子数で分類される。その結果、 $p$  軌道は  $j = l + s = 3/2$  ( $j_z = \pm 3/2, \pm 1/2$ ),  $j = l - s = 1/2$  ( $j_z = \pm 1/2$ ) の 2 つの多重項に分裂する。

<sup>1</sup>この原因は、上述の計算で電子の加速度運動の扱いが不完全であったためである。正しい計算をおこなうと古典論の範囲でも因子 1/2 が現れ (トーマス因子)、ディラックの結果と一致する [L. H. Thomas (1926)]。ただし「トーマスのやった計算はおそろしくややこしい」[朝永振一郎:「スピンはめぐる」(中央公論社, 1974)]。

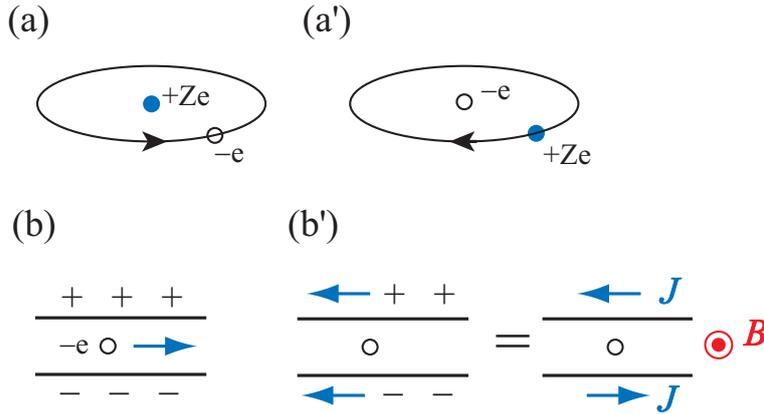


図 1: (a) 原子におけるスピン軌道相互作用の古典モデル: (a') 電子が静止した座標系では原子核の正電荷が円運動をし、それが作る有効磁場を電子のスピンが感じる。(b) ラシュバのスピン軌道相互作用の古典モデル。電子の運動する 2 次元平面に垂直方向の電場を  $\pm$  の外部電荷で表している: (b') 電子が静止した座標系では外部電荷の運動が環状電流に相当し、それが作る有効磁場を電子のスピンが感じる。

固体中のバンド構造は、 $k \cdot p$  摂動 [9] によると図 2 のように与えられる。価電子バンドは  $\Gamma$  点 [ $k = (0, 0, 0)$  の点] で  $j = 3/2$  と  $j = 1/2$  の 2 つに分れ、後者は split-off バンドと呼ばれる。前者は  $\Gamma$  点を離れると、さらに  $j_z = \pm 3/2$  の heavy-hole バンド、 $j_z = \pm 1/2$  の light-hole バンドの 2 つに分裂する。

これに対して、伝導バンドの底付近では電子の波動関数は主として構成原子の  $s$  軌道 ( $l = 0$ ) から成る。原子由来のスピン軌道相互作用の影響は小さく、通常無視される。

### 1.3 半導体中のスピン軌道相互作用 (伝導バンド)

それでは半導体中の伝導電子 (伝導バンドの底付近にドーパされた電子) にはスピン軌道相互作用がはたらかないか、ということそうではない。本連載記事ではこの伝導電子における (原子由来でない) スピン軌道相互作用に焦点を当てる。電子のフェルミ波長等、考える空間スケールは原子スケール (格子定数) よりもずっと大きく、有効質量近似が成り立つことを仮定する<sup>2</sup>。以下では断らない限り、電子の質量  $m$  は伝導バンドでの有効質量を意味するものとする (GaAs 中は真空中の質量の 0.067 倍)。

スピン軌道相互作用は前述のように相対論的效果であって、真空中では大きな効果ではない。が、GaAs などの半導体での伝導バンドでは、バンドの効果によって有効的なスピン軌道相互作用が増大する。 $k \cdot p$  摂動によると、式 (2) は次式に置き換わる (詳細な説明は文献 [7] を参照)。

$$H_{\text{SO}} = \frac{P^2}{3} \left[ \frac{1}{E_0^2} - \frac{1}{(E_0 + \Delta_0)^2} \right] \frac{1}{\hbar} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} \times \nabla U). \quad (3)$$

$P$  は伝導バンドと価電子バンド間の行列要素、 $E_0$  は伝導バンドと価電子バンドの間のバンドギャップ、 $\Delta_0$  は価電子バンドにおける  $j = 3/2$  と  $j = 1/2$  バンド間のエネルギーである (図 2 参照)。大雑把に言うと、ディラック理論の粒子・反粒子のギャップが半導体でのバンドギャップに対応して

<sup>2</sup>固体中電子の波動関数は (包絡関数)  $\times$  (Bloch 波), と書くことができる。原子スケールより滑らかな包絡関数は、Schrödinger 方程式で電子の質量を有効質量に置き換えた有効質量方程式に従う。原子スケールで変動する部分 (Bloch 波) は考えなくて良い。

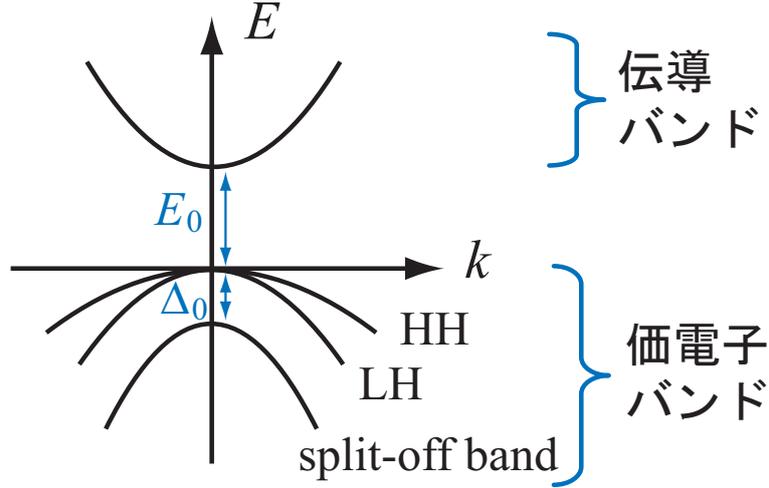


図 2: GaAs などの化合物半導体における伝導バンド、および価電子バンドの概念図。価電子バンドは原子由来のスピンの軌道相互作用によって、heavy-hole (HH) バンド、light-hole (LH) バンド、および split-off バンドの 3 つに分裂している。

おり、InGaAs, InAs などの狭ギャップ半導体でスピンの軌道相互作用の増大が著しい。その中でも次のラシュバ項とドレッシェルハウス項の 2 つが重要と考えられている。

ラシュバのスピンの軌道相互作用: InGaAs/GaAs のヘテロ構造では界面近傍に 2 次元電子系が形成されるが、それに垂直方向に電場をかけたときのスピンの軌道相互作用がラシュバ (Rashba) 項である。(この電場は電流に垂直方向にかけられるもので、ソース、ドレイン間のバイアス電場とは独立のものであることに注意。)  $xy$  平面内の 2 次元電子ガスに  $z$  方向の電場をかけた場合、

$$H_{\text{RSO}} = \frac{\alpha}{\hbar} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} \times \hat{z}) = \frac{\alpha}{\hbar} (p_y \sigma_x - p_x \sigma_y) \quad (4)$$

の形をとる。その大きさを無次元のパラメーター  $k_\alpha/k_F$ 、ただし

$$k_\alpha = \frac{m\alpha}{\hbar^2}$$

( $m$  は有効質量、 $k_F$  は Fermi 波数)、で表すと、InGaAs ヘテロ構造では  $\alpha = (3 \sim 4) \times 10^{-11}$  eVm,  $\Delta_R \equiv 2k_F\alpha = 15 \sim 20$  meV より  $k_\alpha/k_F = \Delta_R/(4E_F) \approx 0.1$  となる [10, 11]。

ラシュバのスピンの軌道相互作用は、原子のそれと同様に古典的な解釈が可能である。図 1(b) のように  $\pm$  の外部電荷によって  $z$  方向の電場がかかっているとき、電子の  $x$  方向への運動を考える。電子が静止した座標系でみると、外部電荷は  $-x$  方向に運動しているように見える [図 1(b')]。それは電流が環状に流れていることと等価であり、それが  $-y$  方向に磁場を作り、その結果、電子スピンの伴う磁気モーメントのエネルギーが変化する [式 (4) 最右辺の第 2 項]。電子が  $y$  方向に運動している場合も同様に考えると、 $x$  方向に有効磁場が作られることがわかる。

ドレッシェルハウスのスピンの軌道相互作用: 一方、ドレッシェルハウス (Dresselhaus) 項は半導体の結晶構造に起因する [12]。III-V 族化合物半導体では空間反転対称性が破れているため、結晶が作る電場に起因したスピンの軌道相互作用がはたらく。3 次元のバルク半導体において、 $x, y, z$  軸をそ

それぞれ [100], [010], [001] 方向に選ぶとき

$$H_{\text{DSO}}^{(3\text{D})} = \frac{\gamma}{\hbar} [p_x(p_y^2 - p_z^2)\sigma_x + p_y(p_z^2 - p_x^2)\sigma_y + p_z(p_x^2 - p_y^2)\sigma_z]$$

で与えられる。いま [001] 方向に成長したヘテロ構造における 2 次元電子系を考え、波動関数の  $z$  方向の広がりについて平均をとると

$$\begin{aligned} H_{\text{DSO}} &= \frac{\gamma}{\hbar} [p_x(p_y^2 - \langle p_z^2 \rangle)\sigma_x + p_y(\langle p_z^2 \rangle - p_x^2)\sigma_y] \\ &= \frac{\beta}{\hbar} (-p_x\sigma_x + p_y\sigma_y) + (\mathbf{p} \text{ の 3 次の項}). \end{aligned} \quad (5)$$

ここで  $\beta = \gamma\langle p_z^2 \rangle$ , また  $\langle p_z \rangle = 0$  とした。

GaAs ではドレッシェルハウス項とラシュバ項は同程度の大きさである [13]。一方、InGaAs などではラシュバ項がドレッシェルハウス項より非常に大きくなり得る。さらにラシュバ項は外部電場によって大きさを制御できるため、次節で述べるスピントランジスターなどのデバイスへの応用が注目されている。本解説ではラシュバのスピノ軌道相互作用を中心に議論する。

#### 1.4 スピントランジスター

Datta と Das が考案したスピントランジスター [14] の概略を図 3(a) に示す。通常の電界操作トランジスター (FET) との違いは、ソースとドレイン電極が強磁性体であること (したがってドレインに入射する電子のスピンの向きによって電気伝導が変わる)、ゲート電極で電場を変えることで 2 次元電子系におけるラシュバのスピノ軌道相互作用を制御すること、である<sup>3</sup>。強磁性体から半導体に入射して  $x$  方向に進行する電子のスピンは、ラシュバ相互作用による  $y$  方向の有効磁場の周りの歳差運動をおこなう。その回転角によって電気伝導が変調される。

具体的に見てみよう。ラシュバ相互作用 (4) をゼーマン項

$$g\mu_B \mathbf{s} \cdot \mathbf{B}_{\text{eff}} = \gamma\hbar \mathbf{s} \cdot \mathbf{B}_{\text{eff}}$$

[ $g$  は  $g$  因子で固体中は 2 から大きくずれる (GaAs では  $g \approx 0.4$ );  $\gamma = g\mu_B/\hbar$  は磁気回転比で電子の磁気モーメントは  $\mu_s = -\gamma\hbar \mathbf{s}$  で与えられる] とみなすと、有効磁場は

$$\gamma\hbar \mathbf{B}_{\text{eff}} = 2\frac{\alpha}{\hbar}(\mathbf{p} \times \hat{z}),$$

スピノ角運動量  $\hbar \mathbf{s}$  の歳差運動は

$$\hbar \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \boldsymbol{\mu}_s \times \mathbf{B}_{\text{eff}} = -\gamma\hbar \mathbf{s} \times \mathbf{B}_{\text{eff}}$$

となる。電子が  $x$  方向に運動量  $\hbar k_x$  で伝播するとき<sup>4</sup>、有効磁場は  $-y$  方向を向き、歳差運動の角振動数は  $\omega = \gamma|\mathbf{B}_{\text{eff}}| = 2\alpha k_x/\hbar$  である。 $x$  方向に  $L$  進むときのスピンの回転角は

$$\Delta\theta = \frac{2\alpha k_x}{\hbar} \Delta t = \frac{2\alpha k_x}{\hbar} \frac{L}{(\hbar k_x/m)} = \frac{2\alpha m L}{\hbar^2}. \quad (6)$$

$\omega$  および伝播速度 ( $\hbar k_x/m$ ) がともに  $k_x$  に比例するため、 $\Delta\theta$  は  $k_x$  の値に依らない。式 (6) は、スピノ軌道相互作用の大きさ  $\alpha$  を電場で変えることで回転角  $\Delta\theta$  を制御するスピントランジスターの機能を示している。

<sup>3</sup>電子の流れを水の流れに対応させて、3 つの電極に名前がついている: ソース (水源) からドレイン (排水) への水流がゲート (水門) で調整される。

<sup>4</sup> $y$  方向に適当な閉じ込めポテンシャルのある擬 1 次元構造 (量子細線) を想定している [14]。

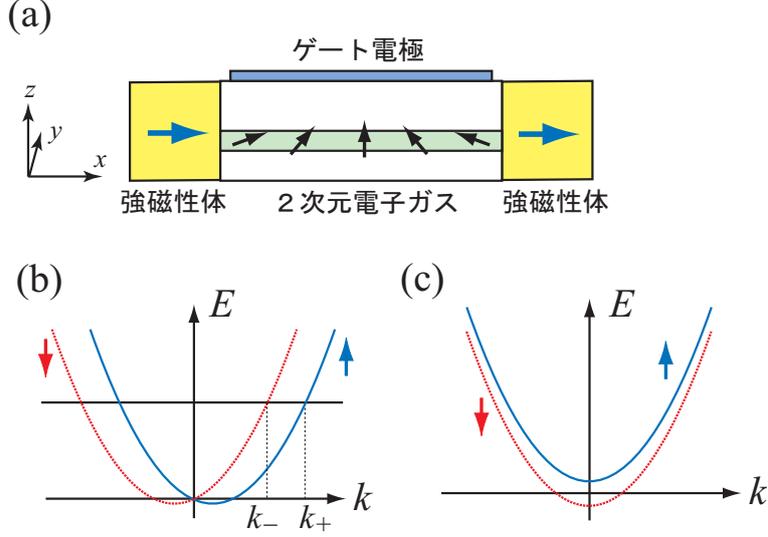


図 3: (a) Datta と Das が考案したスピントランジスタの模式図。一方の強磁性体電極（ソース）から半導体ヘテロ構造（2次元電子系）にスピン分極した電子が入射し、他方の強磁性体電極（ドレイン）に出て行く。ゲート電極から2次元電子系に垂直方向の電場をかけ、ラシュバのスピン軌道相互作用をはたかせる。スピン軌道相互作用による有効磁場によって電子のスピン向きが変化し、電気伝導度に変調される。(b) ラシュバのスピン軌道相互作用がある場合の1次元運動の分散関係。同じエネルギーに対して、スピンによって異なる波数  $k_{\pm}$  が対応している。(c) スピン軌道相互作用がなく、外部磁場によるゼーマン効果がある場合の分散関係:  $E_{k,\pm} = \hbar^2 k^2 / (2m) \pm g\mu_B B / 2$ 。

スピンの歳差運動は量子力学では以下のように記述される。 $x$  方向の運動のみを考えると Hamiltonian は

$$H = \frac{p_x^2}{2m} - \frac{\alpha}{\hbar} p_x \sigma_y.$$

この固有状態と固有値は直ちに求められ、

$$\begin{aligned} \psi_{k,\pm} &= e^{ikx} \chi_{\pm}^{(y)}, \\ E_{k,\pm} &= \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \mp \alpha k = \frac{\hbar^2}{2m} (k \mp k_{\alpha})^2 - \frac{\hbar^2 k_{\alpha}^2}{2m}. \end{aligned}$$

ここで  $\chi_{\pm}^{(y)}$  は  $y$  方向のスピンアップ、ダウンを示す:  $\sigma_y \chi_{\pm}^{(y)} = \pm \chi_{\pm}^{(y)}$ .  $E_{k,\pm}$  の分散関係を図 3(b) に示したが、それは次の特徴を持つ。

- (i) 同じエネルギーに対してスピンによって波数が異なる。それを  $k_{\pm}$  と書くと  $k_+ - k_{\alpha} = k_- + k_{\alpha} (\equiv k_0)$ . したがって位相速度がスピンに依存する。
- (ii) 群速度は  $\frac{1}{\hbar} \left. \frac{\partial E_{k,\pm}}{\partial k} \right|_{k=k_{\pm}}$  で与えられ、エネルギーが同じならばスピンに依らない。
- (iii) スピン軌道相互作用は時間反転対称性を壊さないので Kramers 縮退 (互いに時間反転した状態のエネルギーが同じ) がある<sup>5</sup>:  $E_{k,+} = E_{-k,-}$ .

比較のため、スピン軌道相互作用がなく、外部磁場によるゼーマン効果がある場合の分散関係  $[E_{k,\pm} = \hbar^2 k^2 / (2m) \pm g\mu_B B / 2]$  を図 3(c) に示した。外部磁場の場合はスピンアップとダウンが

<sup>5</sup>時間を反転させると運動量の符号が変わり、スピンが逆向きになる。例えば、J. J. Sakurai: 「現代の量子力学」(吉岡書店、1989)、第4章を参照。

「上下」に分裂し、スピン軌道相互作用の場合は「左右」に分裂していることがわかる。上述の (i)–(iii) の特徴は外部磁場の場合には当てはまらない。

電子があるエネルギーで  $x$  方向のスピンアップ状態  $\chi_+^{(x)}$  で  $x = 0$  に入射したとする。

$$\begin{cases} \chi_+^{(x)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\chi_+^{(y)} + i\chi_-^{(y)}] \\ \chi_-^{(x)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[i\chi_+^{(y)} + \chi_-^{(y)}] \end{cases}$$

の関係に注意すると、波動関数は

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{\sqrt{2}}[e^{ik_+x}\chi_+^{(y)} + ie^{ik_-x}\chi_-^{(y)}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{ik_0x}[e^{ik_\alpha x}\chi_+^{(y)} + ie^{-ik_\alpha x}\chi_-^{(y)}] \\ &= e^{ik_0x}[\cos(k_\alpha x)\chi_+^{(x)} + \sin(k_\alpha x)\chi_-^{(x)}]. \end{aligned}$$

このように位相速度の違いがスピンの歳差運動をひきおこす。 $x = L$  でのスピンの向きは  $k_\alpha$  のみに依存する。

## 2 アハロノフ・キャッシャー (AC) 効果

アハロノフ・ボーム (AB) 効果は、電子が磁場  $B$  を直接感じていなくてもベクトルポテンシャル  $A$  ( $B = \text{rot}A$ ) の影響で位相が変化する現象である。図 4(a) に示す AB リングでの干渉効果として観測される。Aharonov と Casher はマクスウェル方程式での電場と磁場の対称性から、ベクトルポテンシャルが荷電粒子に及ぼす AB 効果と同様に、スカラーポテンシャルが磁気モーメントを持つ中性粒子の位相を変化させる効果の存在を指摘した [15]。電子の磁気モーメント (スピン) にスカラーポテンシャル (電場) に起因するラシュバのスピン軌道相互作用がはたらく場合、このアハロノフ・キャッシャー (AC) 効果が現れる [2 次元面に垂直にかけた電場は電子の運動に影響しないことに注意]。電子は電荷とスピンを持つので、AB リングの干渉実験では AB 効果、AC 効果の両者が観測される。

本章では、まず AB 効果について説明し、その後ラシュバ相互作用による AC 効果を具体的に計算する。

### 2.1 AB 効果

図 4(a) のアハロノフ・ボーム干渉計を考える。点 A に入射した電子の波動は 2 つの経路に別れ、点 B で干渉する「2 重スリットの実験」に相当する。リングには磁束  $\Phi$  が貫いているが、電子の通り道には磁場が存在しないものとする。

磁場  $B(\mathbf{r})$  の影響をベクトルポテンシャル  $A(\mathbf{r})$  で表すと、Hamiltonian は

$$H = \frac{1}{2m}[\mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r})]^2 + V(\mathbf{r}). \quad (7)$$

経路  $C_i$  ( $i = 1, 2$ ) において、 $A = 0$  のときの波動関数を  $\psi_i^{(0)}(\mathbf{r})$  とすると  $A \neq 0$  のときの波動関数は

$$\psi_i(\mathbf{r}) = \psi_i^{(0)}(\mathbf{r}) \exp \left[ -i \frac{e}{\hbar} \int_{\mathbf{r}_A(C_i)}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \right] \quad (8)$$

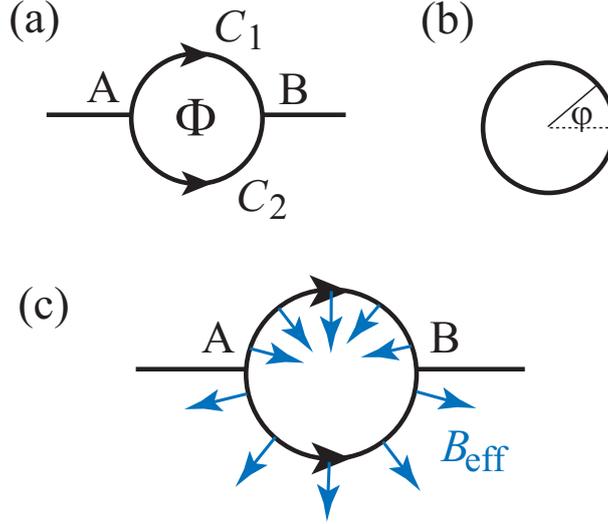


図 4: (a) アハロノフ・ボーム干渉計の概念図。点 A に入射した電子の波動は 2 つの経路に別れ、点 B で干渉する。リングを貫く磁束  $\Phi$  で干渉パターンが変化する。(b) 孤立したリングのモデル。(c) ラシュバのスピノ軌道相互作用がある場合、電子スピンは経路によって異なる有効磁場 ( $B_{\text{eff}} \propto \mathbf{p} \times \hat{z}$ ) を感じ、その周りで歳差運動をおこなう。その結果スピんに依存した干渉効果が現れ、AC 効果が生じる。

で与えられる。これは Hamiltonian (7) を  $\psi_i(\mathbf{r})$  に演算させることで確かめられる<sup>6</sup>:

$$(\mathbf{p} + e\mathbf{A})\psi_i(\mathbf{r}) = (-i\hbar\nabla + e\mathbf{A})\psi_i(\mathbf{r}) = [-i\hbar\nabla\psi_i^{(0)}(\mathbf{r})]e^{-i\frac{e}{\hbar}\int\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}'}, \text{ etc.}$$

点 B での波動関数は 2 つの経路を通る波の重ねあわせで書け

$$\psi(\mathbf{r}_B) = \psi_1(\mathbf{r}_B) + \psi_2(\mathbf{r}_B),$$

電子の存在確率は

$$|\psi(\mathbf{r}_B)|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2\cos(\theta_1 - \theta_2 + \Delta\phi)$$

となる。ここで  $\theta_1, \theta_2$  は  $\psi_1^{(0)}(\mathbf{r}_B), \psi_2^{(0)}(\mathbf{r}_B)$  の位相、

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= -\frac{e}{\hbar}\int_{\mathbf{r}_A(C_1)}^{\mathbf{r}_B}\mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} + \frac{e}{\hbar}\int_{\mathbf{r}_A(C_2)}^{\mathbf{r}_B}\mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{e}{\hbar}\oint\mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{e}{\hbar}\int\text{rot}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} \\ &= \frac{e}{\hbar}\int\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}. \end{aligned}$$

3 行目に移るときにストークスの定理を用いた。 $\Phi$  はリングを貫く磁束、 $\Phi_0 = h/e$  は磁束量子 (quantum flux) と呼ばれる。 $\Phi$  を変化させると  $\Phi_0$  の周期で干渉パターンが変化する。例えば経路  $C_1$  と  $C_2$  が対称なリング ( $|\psi_1| = |\psi_2|, \theta_1 = \theta_2$ ) での電気伝導度は、Landauer の公式 [16] を用いると

$$G = \frac{e^2}{h}\left[1 + \cos\left(2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)\right] \quad (9)$$

で与えられる。

<sup>6</sup>式 (8) は磁場が存在しない範囲でのみ成立する。そうでないときは波動関数の一価性が満たされない。 $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} = 0$ 、したがってスカラー関数  $\chi(\mathbf{r})$  を用いて  $\mathbf{A} = \nabla\chi$  と書かれるときに限り、式 (8) 中の線積分が経路に依らず、 $\mathbf{r}$  の関数となる

## 2.2 AC 効果

次に AB リング中の磁束に加えて、ラシュバのスピソ軌道相互作用もある場合を考える。磁場がある場合は、式 (4) で  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + e\mathbf{A}$  の置き換えをおこなう [一般に式 (2) でも同様なことがディラック方程式から導かれる [8]]。

電子の位相変化を見るには、図 4(a) の代わりに孤立したリング [図 4(b)] を考えると計算が容易である<sup>7</sup>。リングは幅が無視できる半径  $r$  の円を仮定する。リングに沿っての運動は、極座標  $\varphi$  を用いて

$$\begin{aligned} p_x &= i\hbar \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ p_y &= -i\hbar \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

リングに垂直な一様な磁場をベクトルポテンシャル  $\mathbf{A} = (Br/2)\mathbf{e}_\varphi = (\Phi/2\pi r)\mathbf{e}_\varphi$  ( $\mathbf{e}_\varphi$  は  $\varphi$  方向の単位ベクトル、 $\Phi = \pi r^2$  は磁束) であらわすと、Hamiltonian は

$$\begin{aligned} H &= \frac{\hbar^2}{2mr^2} \left( -i\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 + \frac{\alpha}{r} (\cos \varphi \sigma_x + \sin \varphi \sigma_y) \left( -i\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \\ &\quad - i\alpha (\cos \varphi \sigma_y - \sin \varphi \sigma_x) \frac{1}{2r} \end{aligned} \quad (10)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2mr^2} \left[ -i\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\Phi}{\Phi_0} + \frac{m\alpha}{\hbar^2} (\cos \varphi \sigma_x + \sin \varphi \sigma_y) \right]^2 - \frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}. \quad (11)$$

[式 (10) の右辺の最後の項は、 $r$  方向の微分  $\partial/\partial r$  の  $-1/2r$  への置き換えから来るもので、リングの幅をゼロにする極限操作から得られる [17]。この項がないと  $H$  がエルミートにならない<sup>8</sup>。]

Hamiltonian (11) の固有状態を求めるには、

$$-i\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\Phi}{\Phi_0} + \frac{m\alpha}{\hbar^2} (\cos \varphi \sigma_x + \sin \varphi \sigma_y) = -i\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\Phi}{\Phi_0} + \frac{m\alpha}{\hbar^2} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix}$$

を対角化すればよい。周期的境界条件  $\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi)$  を満たす解は

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} C_1 e^{in\varphi} \\ C_2 e^{i(n+1)\varphi} \end{pmatrix}$$

の形をとることがわかる。Hamiltonian (11) の固有値、固有状態は、

$$\begin{aligned} E_{n,\pm} &= \frac{\hbar^2}{2mr^2} \left( n + \frac{\Phi}{\Phi_0} + \frac{\Phi_{\pm}^{\text{AC}}}{2\pi} \right)^2 - \frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}, \\ \psi_{n,+} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} \cos(\theta_\alpha/2) e^{i(n-1)\varphi} \\ \sin(\theta_\alpha/2) e^{in\varphi} \end{pmatrix}, \\ \psi_{n,-} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} -\sin(\theta_\alpha/2) e^{in\varphi} \\ \cos(\theta_\alpha/2) e^{i(n+1)\varphi} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

<sup>7</sup> 図 4(a) において、例えば  $z$  方向のスピソアップまたはダウン ( $\chi_{\pm}^{(z)}$ ) の電子を点 A に入射させたすると、 $\psi_1(\mathbf{r}_B) = A_1\chi_+^{(z)} + B_1\chi_-^{(z)}$ ,  $\psi_2(\mathbf{r}_B) = A_2\chi_+^{(z)} + B_2\chi_-^{(z)}$  において  $A_1/B_1 = A_2/B_2$  になるとは限らない。これでは AC 位相を定義できない。入射スピソの方向をうまく選ぶ [ $C_1\chi_+^{(z)} + C_2\chi_-^{(z)}$ , およびそれに直交する方向] と  $A_1/B_1 = A_2/B_2$  となって点 B でのスピソの向きが互いに一致し、位相差が求められる。孤立したリングでの計算では、そのようなスピソの方向が自動的に得られる。

<sup>8</sup> 初期の論文では、この項を落として誤った計算をしている場合があるので注意。

ここで

$$\Phi_{\pm}^{\text{AC}} = \mp\pi \left[ 1 - \sqrt{\left(\frac{2mr\alpha}{\hbar^2}\right)^2 + 1} \right], \quad (13)$$

$\tan \theta_{\alpha} = -2mr\alpha/\hbar^2$  ( $\pi/2 < \theta_{\alpha} \leq \pi$ ;  $\alpha = 0$  のとき  $\theta_{\alpha} = \pi$ ) である。

まずスピン軌道相互作用がない場合 ( $\alpha = 0$ ) について、この結果を考察しよう。リング中の電子の波動関数が  $e^{ikx}$  (ただし  $x = r\varphi$ ) のとき、そのエネルギーは  $\hbar^2 k^2/(2m)$ 。周期的境界条件から、磁場がないとき  $2\pi rk = 2\pi n$ 、磁場がある場合は AB 位相がついて  $2\pi rk - 2\pi\Phi/\Phi_0 = 2\pi n$ 。それに伴うエネルギーの変化が、 $n$  が  $n + \Phi/\Phi_0$  に置き換わる形で式 (12) に現れている<sup>9</sup>。(類似の議論が孤立したリングでの永久電流の計算で見られる [16]。)

磁場がなくスピン軌道相互作用がある場合、電子がリングを伝播するさいにスピンは有効磁場の周りの歳差運動をおこなう<sup>10</sup>。それによって電子がリングを一周したときに得る位相が式 (12) 中の  $\Phi_{\pm}^{\text{AC}}$  に対応する。[図 4(c) には元のアハロノフ・ボーム干渉計の電気伝導において、電子スピンの感じる有効磁場 ( $B_{\text{eff}} \propto \mathbf{p} \times \hat{z}$ ) を図示した。] 一般の場合、2つのスピンの方向 ( $\pm$ ) によって AC 位相は異なるが、図 4(a) で対称なリングの場合の電気伝導では同じ干渉効果をもたらし、

$$G = \frac{e^2}{h} \left[ 1 - \cos \left( \pi \sqrt{\left(\frac{2mr\alpha}{\hbar^2}\right)^2 + 1} \right) \right]. \quad (14)$$

すなわち電場によって  $\alpha$  を変化させると、電気伝導度に振動が現れる。この AC 振動は最近の実験で観測されている [3, 18, 19]。

AB 効果はトポロジカルな位相、ベリー位相、として解釈することができる [20]。AC 効果についても類似の議論が可能であり、Qian と Su によって報告されている [21]<sup>11</sup>。またスピン軌道相互作用の non-Abelian ゲージ場の構造という観点からも、AC 効果が議論されている [22]。

本連載記事は、応用物理学会スピンエレクトロニクス研究会の入門セミナー (2007 年 12 月) のために筆者自身が執筆したテキストに加筆したものである。関連する研究の遂行においては、勝本信吾氏、都倉康弘氏 G. E. W. Bauer 氏、山内淳氏、黒谷雄司氏、林哲也氏、横内裕人氏、松林大介氏、らと有益な議論をしていただいた。ここに感謝いたします。

## 参考文献

- [1] 多々良源、河野浩、柴田絢也: 固体物理 **43**, 1 (2008).
- [2] 長岡洋介、安藤恒也、高山一: 岩波講座 現代の物理学 18 「局在・量子ホール効果・密度波」 (岩波書店、1993).
- [3] 新田淳作、T. Bergsten: 固体物理 **42**, 331 (2007).

<sup>9</sup>スピン軌道相互作用がないが磁場がある場合、時間反転対称性が破れ Kramers 縮退は存在しない。が、今はゼーマン効果を無視しているためにスピン縮退は残る:  $E_{n,+} = E_{n,-}$

<sup>10</sup>磁場がない場合は時間反転対称性のために Kramers 縮退が存在する:  $E_{n,+} = E_{-n,-}$ 。

<sup>11</sup>文献 [21] では、ベリー位相を非断熱的な運動に拡張した Aharonov-Anandan (AA) 位相が導入されている。AC 位相、式 (13)、はトポロジカルな AA 位相  $\mp\pi(1 - \cos \theta_{\alpha})$  とダイナミカルな位相の寄与の和として理解される。この連載で回を改めて説明する予定である。

- [4] 村上修一、永長直人: 固体物理 **39**, 27 (2004).
- [5] 村上修一: 日本物理学会誌 **62**, 2 (2007).
- [6] 永長直人: 固体物理 **42**, 873 (2007).
- [7] 新田淳作、古賀貴亮: 固体物理 **40**, 189 (2005).
- [8] 例えば、小出昭一郎: 「量子力学 (II)」 (裳華房、1969).
- [9] 例えば、御子柴宣夫: 「半導体の物理 (改訂版)」 (培風館、1991).
- [10] D. Grundler, Phys. Rev. Lett. **84**, 6074 (2000).
- [11] Y. Sato, T. Kita, S. Gozu and S. Yamada, J. Appl. Phys. **89**, 8017 (2001).
- [12] G. Dresselhaus: Phys. Rev. **100**, 580 (1955).
- [13] J. B. Miller, D. M. Zumbühl, C. M. Marcus, Y. B. Lyanda-Geller, D. Goldhaber-Gordon, K. Campman and A. C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **90**, 76807 (2003).
- [14] S. Datta and B. Das, Appl. Phys. Lett. **56**, 665 (1990).
- [15] Y. Aharonov and A. Casher, Phys. Rev. Lett. **53**, 319 (1984).
- [16] 勝本信吾: 「メゾスコピック系」 (朝倉書店、2003).
- [17] F. E. Meijer, A. F. Morpurgo and T. M. Klapwijk, Phys. Rev. B **66**, 33107 (2002).
- [18] M. König *et al.*, Phys. Rev. Lett. **96**, 76804 (2006).
- [19] T. Bergsten, T. Kobayashi, Y. Sekine and J. Nitta, Phys. Rev. Lett. **97**, 196803 (2006).
- [20] 永長直人: 固体物理 **42**, 1 (2007).
- [21] T. Z. Qian and Z. B. Su, Phys. Rev. Lett. **72**, 2311 (1994).
- [22] N. Hatano, R. Shirasaki and H. Nakamura, Phys. Rev. A **75**, 032107 (2007).